Städtisches Labenwolf-Gymnasium Nürnberg

Kollegstufe 2005/2007 Schuljahr 2006/2007

F A C H A R B E I T

aus dem Fach

Mathematik

Thema: **Parkettierung**

Verfasser: **Ingo Benjamin Ulrich Zansinger**

Leistungskurse: **Mathematik**

Kursleiter/in: **Fr. Pechtl**

Abgabetermin: **26. Januar 2007**

Wertung:

Erzielte Punktzahl (einfache Wertung): _ _

In Worten: _ _ _ _ _ _ _ _ _

Unterschrift der Kursleiterin:

Fr. Pechtl

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Im Rahmen der vorliegenden Facharbeit soll der mathematische Themenkomplex der Parkettierung, präsent im Alltag bei Fliesenmustern, Bodenbelägen, Op-Art Mustern auf Kleidung, Tapeten und Gebrauchsgegenständen, näher erläutert werden. Bei der allgemeinen theoretisch-mathematischen Grundlegung gehe ich auf den ein-, zwei- und dreidimensionalen Raum ein. Für die Darstellung einer eindimensionalen Parkettierung befindet sich im Anhang ein eigens hierzu von mir erstelltes Hypertext-Preprozessor Script. Anwendungsbeispiele zur praktischen Umsetzung der Thematik im „Lehrplan Gymnasium in Bayern“ für das G8 (MuG) runden das Thema ab.

Ich habe dieses Thema gewählt, weil sowohl Computeranimation als auch Parkettierung sich mit der räumlichen Transformation befassen und dieses mathematische Randgebiet im täglichen Leben präsent ist. Dabei ging es mir auch um den Zusammenhang zwischen mathematischer Fragestellung und Praxisbezug für Schüler. Ferner habe ich mich mit der Geschichte des Parkettierungsproblems und der englisch-mathematischen Fachterminologie auseinandergesetzt, weil viele Mathematiker, die sich mit Parkettierung beschäftigen, ihre Erkenntnisse in der englischsprachigen Fachliteratur veröffentlichen.

Parkettierung drei- und mehrdimensionaler Räume kann im Rahmen dieser Facharbeit nur kurz gestreift werden, da es zu einem Spezialbereich der Chemie bzw. der Werkstoffwissenschaften gehört.

2 Grundlagen

Um sich mit dem Thema Parkettierung eingehend zu beschäftigen ist es notwendig fundierte Kenntnisse in folgenden Bereichen zu haben:

- Gleichseitige Polygone
- Winkelberechnung
- Allgemeine Formen des R^2 (Dreieck, Viereck, …, n-Eck)
- Kongruenz / Kongruenzabbildung
- Symmetriegruppen
- Vektor-/Matrizenrechnung

3 Begriffsdefinition

Parkettierung (engl.: tiling) bedeutet in der Mathematik, „anschaulich ausgedrückt, eine lückenlose und überlappungsfreie Überdeckung der Ebene durch Parkettsteine“[1]. Bei der Ebene handelt es sich meist um die euklidische, zweidimensionale Ebene. Aber Parkettierung lässt sich für beliebig viele Dimensionen realisieren, z.B. im eindimensionalen Raum als eine Folge von Zeichen, im dreidimensionalen Raum bei Quasikristallen. In der Fachliteratur finden sich auch Belegung, Zerlegung, Kachelung und Mosaik als Synonym für Parkettierung.

Man unterscheidet die Parkettierung wie folgt:

- Periodisch: ein Muster wiederholt sich in bestimmten Intervallen regelmäßig
- Nicht-periodisch: einzelne periodische Abschnitte, aber auf das ganze Parkett bezogen sind sie nicht periodisch[2]

[1] Artikel *Parkettierung.* In: Wikipedia, Die freie Enzyklopädie.
Bearbeitungsstand: 27. Dezember 2006, 11:59 UTC.
URL: http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Parkettierung&oldid=25591125
(Abgerufen: 29. Dezember 2006, 15:35 UTC)

[2] RINGELING, Manuel, TU Kaiserslautern, 2004, S. 2

4 Parkettierung des zweidimensionalen Raums

Ein Parkettstein (engl.: tile), auch als Kachel oder Pflasterstein bezeichnet, ist homöomorph zur abgeschlossenen, topologischen („d.h. durch grundlegende Gesetze […] definierte […] Eigenschaften“[3]) Scheibe.

> Jeder Kreis (mit Radius > 0) ist **homöomorph** [Hervorhebung von mir] zu jedem Quadrat (mit Seitenlänge > 0) in der euklidischen Ebene R^2. Ein Kreis lässt sich offenbar durch Verbiegen und Verzerren, ohne Zerschneiden, in ein Quadrat überführen, und umgekehrt.[4]

In [►Abbildung 1] und [►Anlage Schachbrettfliesen] z.B. wäre ein Parkettstein ein schwarzes oder weißes Quadrat mit Kantenlänge x und der Fläche x^2. In diesem Beispiel bezeichnet man entweder die schwarze oder die weiße Fliese als Protokachel, da die jeweils anderen kongruent dazu sind. In komplexeren Parkettierungen kann es mehrere Protokacheln geben, die nicht kongruent sein dürfen. Parkettsteine mit Löchern oder nicht zusammenhängenden Teilen scheiden nach dieser Definition aus. Es werden jedoch diese und andere, allgemeinere Parkettsteine zugelassen, um spezielle Formen, Effekte und Muster zu erreichen. Eine Parkettierung besteht im Normalfall aus einer abzählbaren Menge von Protokacheln.

---

[3] Artikel *Einführung in die Geoinformatik.* Von: Prof. Dr. U. Streit, Institut für Geoinformatik der Universität Münster.
Bearbeitungsstand: September 2006.
URL: http://ifgivor.uni-muenster.de/vorlesungen/Geoinformatik/kap/kap4/k04_3.htm
(Abgerufen: 13. Oktober 2006, 16:27 UTC)

[4] Artikel *Homöomorphismus.* In: Wikipedia, Die freie Enzyklopädie.
Bearbeitungsstand: 20. Januar 2007, 15:19 UTC.
URL: http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Hom%C3%B6omorphismus&oldid=26675777
(Abgerufen: 20. Januar 2007, 15:32 UTC)

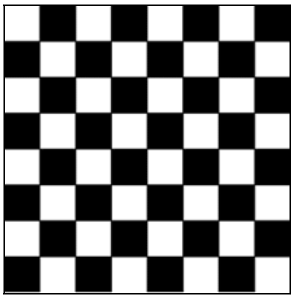


Abbildung 1: Schachbrett

Ein Ausschnitt einer Parkettierung mit nur einem Parkettstein, bestehend aus einer Packung mit 64 Kacheln – eingefärbt in zwei Farben.

Eine solche Menge von Parkettsteinen ergibt entweder eine Packung oder eine Überdeckung:

- In einer Packung liegt kein Punkt der Ebene im Inneren von zwei oder mehr Kacheln und daraus folgend haben verschiedene Kacheln höchstens gemeinsame Randpunkte. [►Abbildung 1]
- In einer Überdeckung dagegen gehört jeder Punkt der Ebene zu mindestens einer Kachel. (Überdeckung ist eine Parkettierung mit zugelassenen Überlappungen)

Analog zur Parkettierung der zweidimensionalen (euklidischen) Ebene gibt es auch die Parkettierung in höheren Dimensionen und allgemeineren Räumen. Hierauf wird in Kapitel 5 [siehe Seite 19] weiter eingegangen.

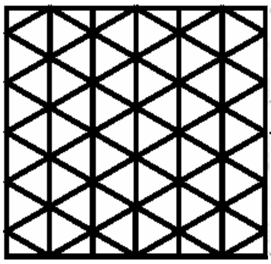
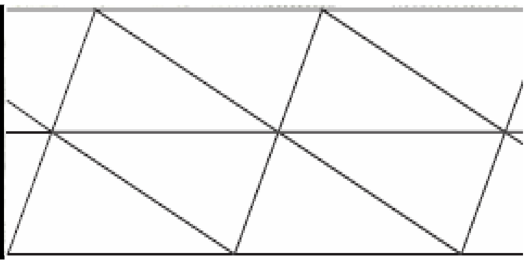
4.1 Periodische Parkettierung

Periodische Parkette können aus einer Protokachel (engl.: prototile) gebildet werden (einsteinig / monohedral) oder aus n Protokacheln (n-steinig / n-hedral).

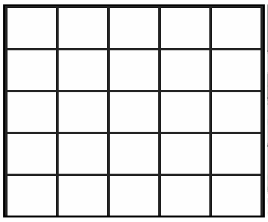
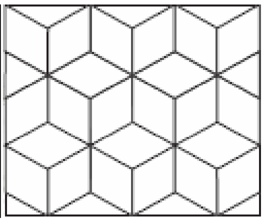
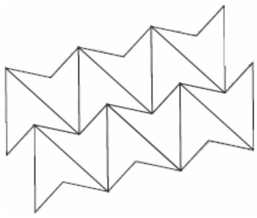
Wenn eine monohedral-periodische Parkettierung nur ein einziges Muster zulässt, so nennt man es monomorph; sind jedoch n verschiedene Musterbildungen möglich, dann n-morph.

<u>Beispiele für monohedrale Parkettierungen:</u>

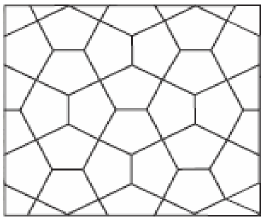
Parkette aus (beliebigen) Dreiecken:

Parkette aus (beliebigen) Vierecken:

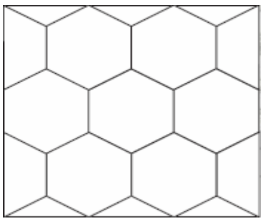




Parkette aus (bestimmten) Fünfecken



(hier Cairo-Tiling)

Parkette aus punktsymmetrischen Sechsecken:



Abbildungsgruppe 2: Monohedrale Parkettierungen

4.1.1 Reguläre Parkettierung

Unter einer regulären, monohedral-periodischen Parkettierung versteht man, dass sie auf ein regelmäßiges (reguläres) Polygon, dessen Seiten alle gleich lang und alle Innenwinkel gleich groß sind, zurückgeführt werden kann. Jedes reguläre Polygon (n-Eck) lässt sich aus n kongruenten, gleichschenkligen Dreiecken bilden (Bestimmungsdreieck). Daraus folgt, dass dafür nur das Quadrat, das reguläre Dreieck und das reguläre Sechseck in Frage kommen.

Häufig jedoch wird der Begriff der regulären Parkettierung dahingehend erweitert, dass nur die Bedingung zutreffen muss, dass jede Kachel kongruent zu ihrer Protokachel ist.

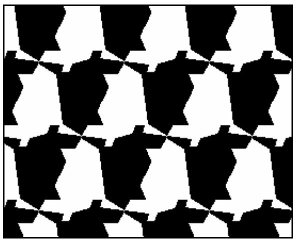


Abbildung 3: Kongruente Protokacheln

Diese Parkettierung wurde von mir mit Escher Web Sketch erstellt und anschließend eingefärbt.

4.1.2 Homogene Parkettierung

Eine Parkettierung heißt homogen, wenn sie folgende Eigenschaften besitzt:

- Protokacheln sind regelmäßige Polygone (Jede Seite gleich Lang)
- Die Polygone berühren sich an den Seiten (Rand) und haben gemeinsame Eckpunkte
- An jedem Knotenpunkt trifft die gleiche Anzahl an Polygonen zusammen.

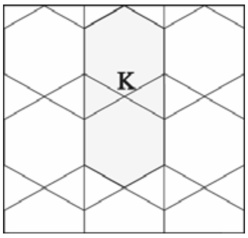
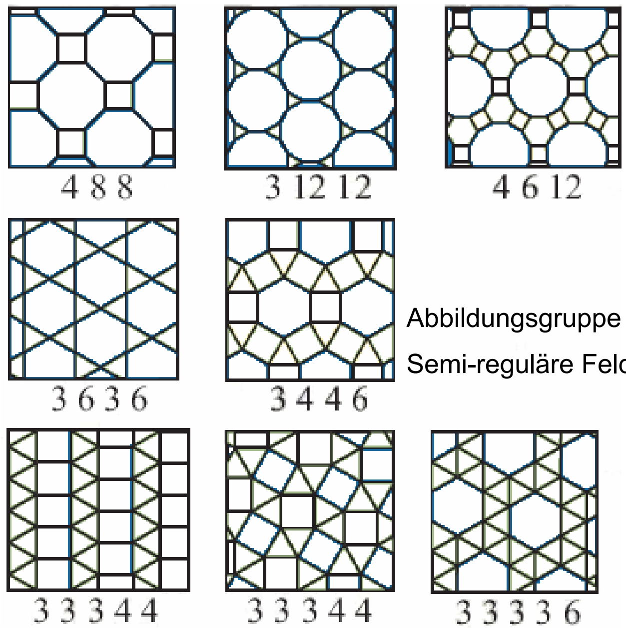


Abbildung 4: Knotenpunkt

K kennzeichnet einen Knotenpunkt von zwei gleichschenkligen Dreiecken und zwei regulären Sechsecken

Folgende acht Parkettierungen werden nach W. Gilde als „semi-reguläre Felderungen“ bezeichnet. Zusammen mit den drei regulären bilden diese die elf einzigen homogenen Parkettierungen. Sie sind aufgeteilt in vier Gruppen nach der Anzahl der aneinander stoßenden Polygone. Die jeweilige Zahlenfolge beschreibt die Art der Vielecke, die an jedem Knotenpunkt aufeinander treffen.



Abbildungsgruppe 5:
Semi-reguläre Felderungen

Die Parkettierung mit der Ziffernfolge 3 3 3 3 6 faszinierte schon Friedrich Johannes Kepler (1571 - 1630). Es lässt sich als einziges als umgekehrtes Spiegelbild herstellen, alle anderen erscheinen im Spiegel unverändert.[5]

4.1.3 Inhomogene Parkettierung

Eine Parkettierung heißt inhomogen, wenn sie folgende Eigenschaften besitzt:

- Protokacheln sind regelmäßige Polygone (Jede Seite gleich Lang)
- Die Polygone berühren sich an den Seiten (Rand) und haben gemeinsame Eckpunkte

Damit besitzen inhomogene Parkettierungen dieselben Eigenschaften wie homogene, allerdings muss nicht an jedem Knotenpunkt die gleiche Anzahl an Polygonen zusammentreffen.

---

[5] GILDE, Werner, 1979, S. 39

4.2 Die Laves-Netze

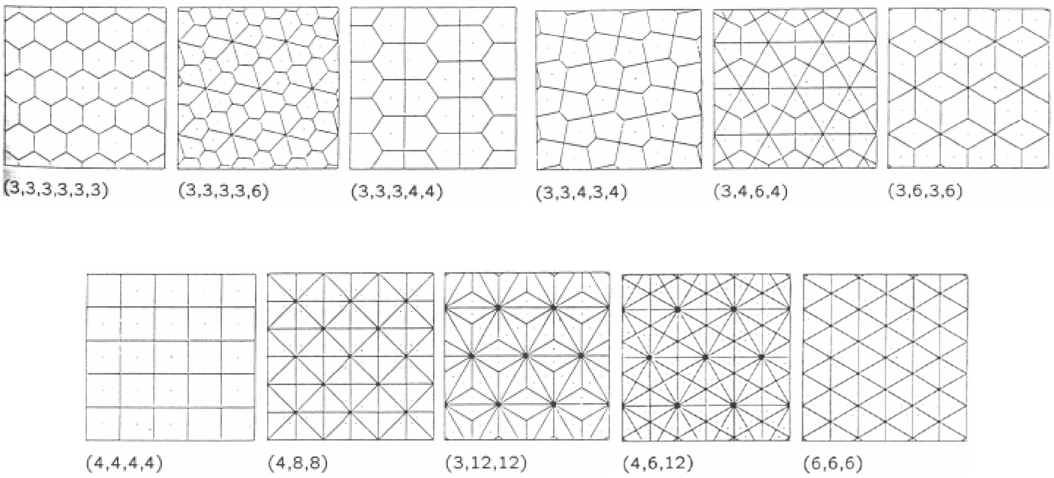
Die bereits erwähnten Knotenpunkte (Randpunkte an denen sich mindestens drei Parkettsteine berühren) werden im Laves-Netz Verzweigungspunkte genannt.

Man erhält das Laves-Netz eines Parketts, indem die Ordnung (Anzahl der Verzweigungen bzw. Anzahl der aufeinander treffenden Kacheln) aller Verzweigungspunkte eines Parkettsteins nacheinander notiert werden.

Die Umrisslinien der Parkettsteine bilden eine netzähnliche Struktur und werden daher als Netz bezeichnet.

Die Laves-Netze wurden nach dem Entdecker Fritz Laves (1906 – 1978), deutscher Mineraloge und Kristallograph, Professor für Kristallographie und Petrographie an der ETH (Eidgenössische Technische Hochschule Zürich) und der Universität Zürich, benannt.

Es fällt auf, dass es unter den regulären Parketten auch hier wiederum nur die elf folgenden, unterschiedlichen Laves-Netze gibt:



Abbildungsgruppe 6: Laves-Netze

Und auch hier kann wiederum in nur vier Gruppen unterteilt werden, obwohl die Unterteilung hier nach der Anzahl der Verzweigungen vorgenommen wird: 6, 5, 4 und 3 Verzweigungspunkte

Die Untersuchung der Laves-Netze macht jedoch nur bei monohedralen bzw. regulären Parkettierungen Sinn, da bei n-hedralen Parkettierungen sowohl die Anzahl der Verzweigungspunkte von der Anzahl der Ecken abhängt als auch von Protokachel zu Protokachel variieren kann.

Durch die Angabe des Laves-Netzes und der Symmetriegruppe kann ein Parkett letztendlich bestimmt werden.

Auch hier wird wieder der Bezug zu alltäglichen Gebrauchsgegenständen deutlich. So findet sich beispielsweise das obige 3 4 6 4 Laves-Netz exakt in einer Bratpfanne wieder:

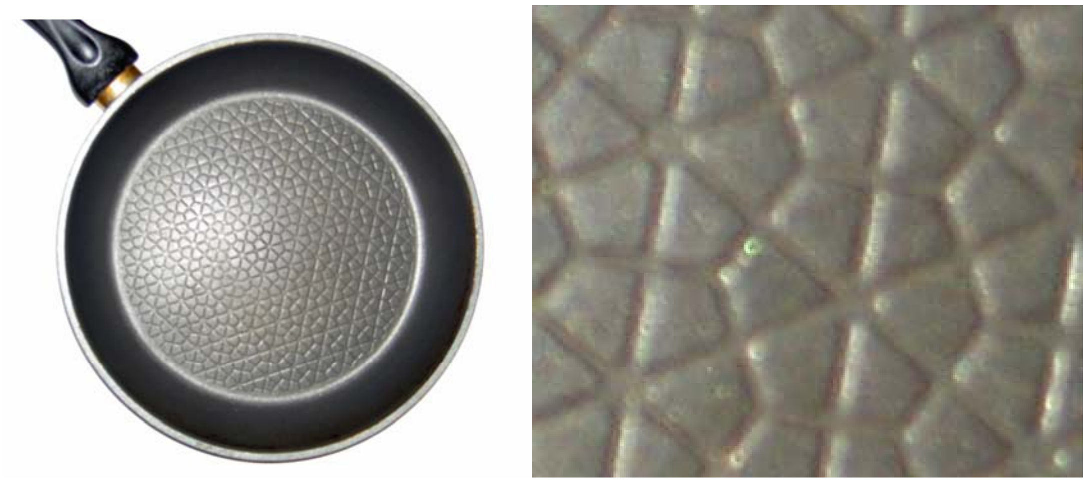


Abbildung 7: Pfanne der Firma Rondine mit 3 4 6 4 Laves-Netz

4.3 Exkurs zur Frage des Parkettierungsproblems

» Ist es möglich, eine euklidische Ebene durch Verwendung einer endlichen Menge an Proto-Kacheln mit einem nicht-periodischen Muster zu parkettieren? «

Der chinesisch-amerikanische Logiker Hao Wang lieferte 1961 weiterführende Erkenntnisse, indem er nach einem Entscheidungsverfahren (mathematisch: Algorithmus) suchte, mit dem es möglich war eine Aussage darüber zu treffen, ob eine endliche Menge an Polygonen (Vielecken) eine euklidische Ebene lückenlos parkettiert. Nach kurzer Zeit fand er heraus, dass die Hypothese der lückenlosen, nicht-periodischen Parkettierung mit Proto-Kacheln zutreffen müsse, wenn man zeigen könnte, dass jede endliche Menge von Proto-Kacheln zur kompletten Ebenenparkettierung auch eine periodische Parkettierung zulasse.

Robert Berger gelang 1966 die Beantwortung der Frage, indem er nachwies, dass es keinen Algorithmus zur Entscheidung des Parkettierungsproblems gab und es folglich im Umkehrschluss eine endliche Menge an Proto-Kacheln geben müsse, die eine nicht-periodische Parkettierung der Ebene zulasse. Berger fand erst eine Menge von 20426, kurze Zeit später eine Menge von 104 Elementen.

Raphael Robinson entdeckte 1971 eine Menge mit nur sechs Elementen.

Roger Penrose, ein renommierter Rouse-Ball-Professor für Mathematik an der Universität Oxford und Namensgeber des gleichnamigen Musters, entdeckte 1973 noch eine zweite Menge von nur sechs Elementen, die er durch Kleben und Schneiden auf zwei Elemente (Pfeil und Drachen) reduzierte.

Durch das Verfahren der Inflation (Zusammenlegung mehrerer Elemente zu einem großen) bzw. der Deflation (Aufteilung eines großen Elements in mehrere kleine) und der Betrachtung neu entstehender Muster an zwei festen Punkten, ergibt sich, dass es überabzählbar („Unendliche Mengen, die man nicht mehr abzählen kann, nennt man überabzählbar“[6]) viele solcher Penrosemuster gibt.

[6] Artikel *Goldene Schnittmuster.* Von: Claus Schönleber und Frank Klinkenberg-Haaß.
Bearbeitungsstand: o. J.
URL: http://www.schoenleber.org/penrose/f-d-penrose.html
(Abgerufen: 12. November 2006, 01:42 UTC)

4.4 Symmetrien einer Parkettierung

Unter Symmetrie einer Parkettierung versteht man eine Kongruenzabbildung der Ebene, welche jeden Parkettstein wieder auf einen Parkettstein abbildet. Die Menge aller möglichen Symmetrien eines Parketts bezeichnet man dabei als Symmetriegruppe. Nach Thiagar Devendran wird

> Die Gesamtheit der Operationen, die ein gegebenes Objekt in sich selbst überführen […] als „Symmetriegruppe“ bezeichnet. Dazu gehört auch die „Identität“, die das Objekt unverändert läßt [sic].[7]

Eine Vergrößerung des Objekts ist somit zwar ähnlich aber nicht kongruent.

Translation, Gleitspiegelung, Achsenspiegelung, Rotation und Punktspiegelung lassen als Einzige Kongruenzabbildungen zu. Diese Arten der Kongruenzabbildung sind in der Orbifold-Notation verzeichnet. [►Anlage 1]

Diese fünf Kongruenzabbildungsmöglichkeiten lassen sich auf drei reduzieren, da sich die Gleitspiegelung auch als Kombination aus Achsenspiegelung und Translation erreichen lässt und die Punktspiegelung einer Rotation um 180° entspricht.

Kongruenzabbildungen dürfen beliebig verkettet werden, da jede Verkettung wieder eine Kongruenzabbildung ist.

4.4.1 Symmetriebetrachtung der periodischen Parkettierung

Als periodisch bezeichnet man eine Parkettierung die aus einer Symmetriegruppe gebildet wird. Sie muss eine oder mehrere Drehungen um 360°, 180°, 120°, 90° oder 60° bzw. Elemente der 1., 2., 3., 4. oder 6. Ordnung ($\frac{360°}{Ordnungsgrad} = Drehwinkel$) oder zwei linear unabhängige Translationen (Verschiebungen) enthalten. Bezogen auf Abbildung 7 [siehe

[7] Thiagar Devendran, 1990, S. 69

Seite 12] bedeutet das, dass die Parkettierung aus der Symmetriegruppe p6 mit 6., 3. und 2. Ordnung bzw. Drehungen um 60°, 120°, und 180° besteht. [►Anlage 1]

> Der russische Kristallograph E. S. Federow bewies 1891, dass es 17 verschiedene Symetriegruppen gibt. Experimentell waren diese Gruppen bereits den Arabern bekannt. In den Mosaiken in der Alhambra in Spanien wurden sie alle benutzt.[8]

Bisher wurden für die euklidische Ebene im zweidimensionalen Raum 17 periodische Parkettierungen entdeckt, die auch als ebene kristallographische Gruppen bezeichnet, und in der Orbifold-Notation [►Anlage 1] beschrieben werden.

Für eine weitere Unterscheidung der 81 regulären Parkettierungs-Typen definiert man 43 Einfache und 38 Nicht-Einfache.

Einfache Parkettierungen erfüllen folgende Regel:

- Zwischen zwei Parkettsteinen, deren Ränder aneinander stoßen, gibt es immer nur eine einzige Möglichkeit der Kongruenzabbildung.

4.4.2 Symmetriebetrachtung der nicht-periodischen Parkettierung

Als nicht-periodisch (aperiodisch) bezeichnet man Parkettierungen aller übrigen Symmetriegruppen (Elemente der 5. (=72°), 7. (~51,4°) und höherer Ordnung).

Die bekannteste nicht-periodisch, symmetrische Parkettierung ist das Penrosemuster. Weil es in Teilbereichen jedoch Symmetrien aufweist, wird es in der Fachliteratur den quasiperiodischen Parkettierungen zugeordnet. Ob es sich hierbei um eine Untergruppe der nichtperiodischen Parkettierung

8 GILDE, Werner, 1979, S. 40

oder um einen extra Parkettierungs-Typ handelt, geht aus der Fachliteratur nicht eindeutig hervor.

Der Zusammenhang zwischen der nichtperiodischen Parkettierung des zwei- und dreidimensionalen Raums wurde deutlich, nachdem Dan Shechtman, vom Israel Institute of Technology in Haifa, 1984 in einer schnell abgekühlten Aluminium-Manganlegierung erstmals Raumstrukturen mit fünfzähligen Symmetrieachsen gefunden hatte. Sie wiesen Symmetrien auf, die in den kristallographischen Raumgruppen nicht auftauchten.

> „Wenn man ein Quasikristall geeignet schneidet, findet man, dass die Oberfläche genau das Muster der Penrose-Parkettierung zeigt.“[9]

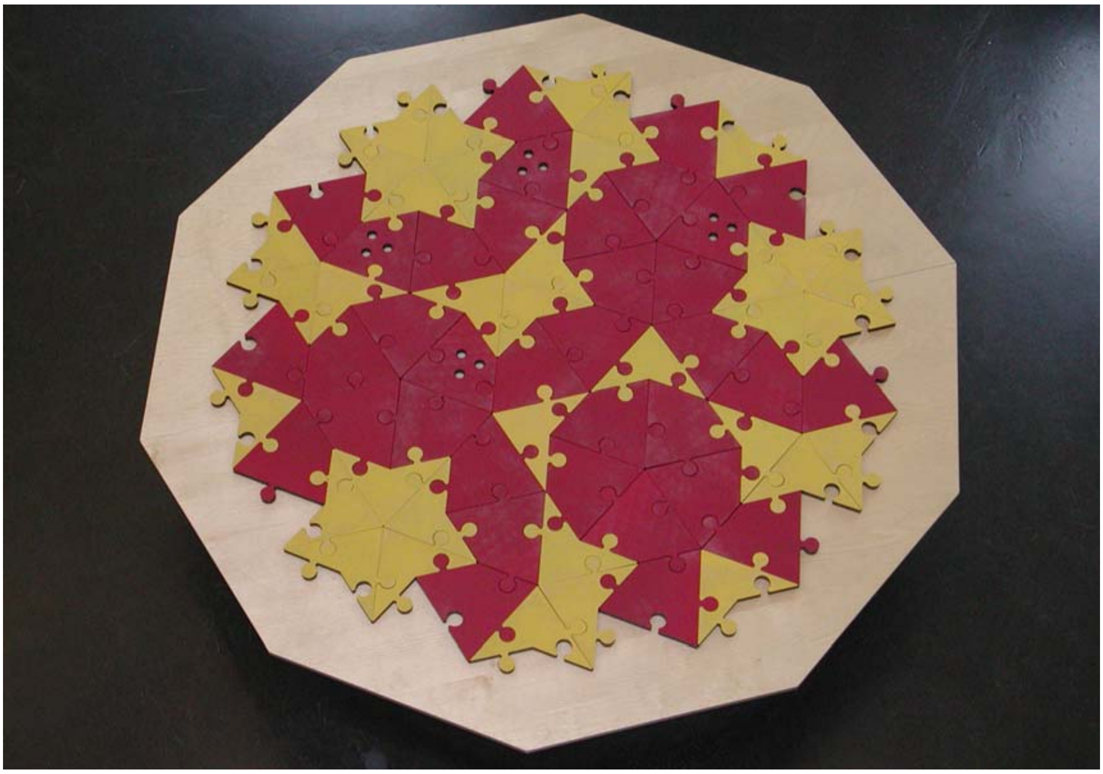


Abbildung 8: Penrose-Puzzle aus dem Mathematikum e.V. in D-35390 Gießen

9 Artikel *Quasikristall.* In: Wikipedia, Die freie Enzyklopädie.
Bearbeitungsstand: 25. November 2006, 15:44 UTC.
URL: http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Quasikristall&oldid=24274553
(Abgerufen: 30. Dezember 2006, 10:24 UTC)

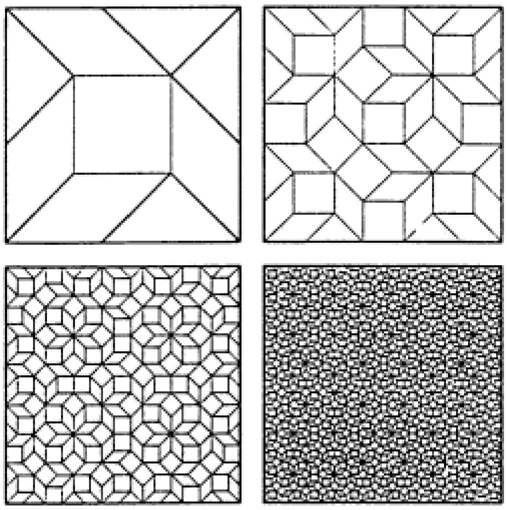
Ich habe mich für dieses Bild aus dem Mathematikum entschieden, weil es ein Beispiel für spielerisches Verständnis komplexer Parkettierung ist.

Bei der nicht-periodischen Parkettierung wird unterscheiden zwischen random tilings und den quasiperiodischen Funktionen.

4.4.2.1 Quasiperiodische Parkettierung

> Penrose entdeckte 1974 mehrere zueinander verwandte kleine aperiodische Mengen von Kacheln, insbesondere auch mehrere **aperiodische Paare**. Mit diesen Kacheln *(genauer: mit zu ihnen kongruenten Kopien)* kann die Ebene parkettiert werden, aber keine dieser Parkettierungen ist periodisch. Sie sind aber stets *beinahe* periodisch und *beinahe* fünfzählig (dreh-)symmetrisch. Sie werden daher quasiperiodisch genannt.[10]

Trotz des hohen bis sehr hohen Ordnungsgrades, ist es nicht möglich, ein Element aus der Struktur herauszugreifen und dieses in periodisch wiederkehrenden Abständen wieder in die Struktur einzupassen. Die hohe Ordnung resultiert aus einem festgelegten Algorithmus für jede einzelne Parkettierung.



Abbildungsgruppe 9:
Penrose-Parkettierung

Abbildungsgruppe 9 zeigt jeweils einen größeren Ausschnitt einer Penrose-Parkettierung.

Es gibt auch hier, Parkettierungen in anderen dimensionalen Räumen:

---

[10] Artikel *Roger Penrose.* In: Wikipedia, Die freie Enzyklopädie.
Bearbeitungsstand: 18. Januar 2007, 01:08 UTC.
URL: http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Roger_Penrose&oldid=26569941
(Abgerufen: 20. Januar 2007, 17:11 UTC)

Ein Beispiel für die eindimensionale Parkettierung ist die Fibonacci-Kette (Leonardo Fibonacci ~1180 - ~1241). Dazu habe ich im Anhang ein Hypertext-Preprozessor Script erstellt, mit dem sich die Fibonacci-Kette aufbauen lässt. [►Anlage 2].

Wie man an der Fibonacci-Kette schnell schon nach wenigen Funktionsdurchläufen erkennen kann, gibt es keinen Block der sich äquidistant (in gleichem Abstand) wiederholt. Die Abfolge ihrer Elemente L und S ist quasiperiodisch. Teilt man in jeder Zeile die Anzahl der L Elemente durch die Anzahl der S Elemente, so erhält man schon nach neun Funktionsdurchläufen einen Näherungswert für die Zahl τ (Verhältniszahl des Goldenen Schnitts) bei dem die ersten zwei Nachkommastellen bereits übereinstimmen.

Wird ein beliebiger Teilbereich der Fibonacci-Kette herausgegriffen, so erhält man ein völlig zufälliges Parkett, das random tiling genannt wird.

4.4.2.2 random tilings (engl.: „Zufällige Parkettierung“)

Die random tilings zeichnen sich dadurch aus, dass sie nach keinen fest vorgeschriebenen Regeln ein Muster bilden, das keinerlei Ordnung aufweist. Es sind also willkürlich aufgebaute Muster. Zwar können in lokalen Gebieten periodische Strukturen erkennbar sein, jedoch lassen sich diese weder translations-invariant verschieben, noch tauchen sie wiederholt in der gleichen Umgebung auf.

> Als **Translationsinvariant** [sic] werden in der Mathematik Abbildungen f bezeichnet, deren Wert sich unter einer Verschiebung nicht ändert:[11]
>
> $$f(x+a) = f(a)$$

[11] Artikel *Translationsinvarianz.* In: Wikipedia, Die freie Enzyklopädie. Bearbeitungsstand: 26. September 2006, 11:59 UTC. URL: http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Translationsinvarianz&oldid=21909836 (Abgerufen: 23. Dezember 2006, 15:15 UTC)

5 Parkettierung des dreidimensionalen Raums

Neben den, in Kapitel 4.4.1 [siehe Seite 14] beschriebenen, ebenen kristallographischen Raumgruppen gibt es noch kristallographische Raumgruppen im dreidimensionalen Raum, 219 an der Zahl, welche hauptsächlich die Symmetrien kristalliner Gebilde im R_3 beschreiben. Ferner gibt es selbstverständlich auch Raumgruppen in höher- bzw. niedrigerdimensonalen Räumen. So gibt es im R_1 2, im R_4 4.783, im R_5 222.018 und im R_6 28.927.922 Raumgruppen.

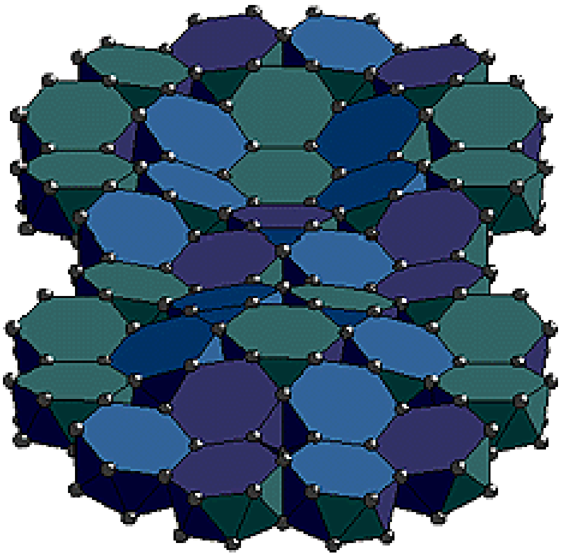


Abbildung 10: Tantal-Tellur-Verbindung

Vereinfacht dargestellte Tantal-Tellur-Verbindung:
Eine Parkettierung aus Clustern mit je 13 Tantal-Atomen (eins in der Mitte; eins je Eckpunkt der zwei darüber und darunter gegeneinander versetzt angeordneten Sechsecke). Die Tantal-Schicht bildet keine plane Ebene, sondern wird erst durch Übereinanderstapelung mehrerer Lagen (mit Tellur-Atomen) zur Parkettierung.

6 Räumliche Koordinatentransformation

Im Folgenden soll noch eine kurze Einführung in die räumliche Koordinatentransformation gegeben werden, da diese Transformationen die in der Parkettierung auftauchenden Kongruenzabbildungen mathematisch beschreiben. Sie werden in vielen Programmiersprachen verwendet, um aufwendige Animationen zu erstellen. Hierbei stütze ich mich überwiegend auf den Artikel *Vektor- und Matrizenrechnung, räumliche Koordinatentransformation* von S. Fuchs.[12]

Dazu muss der Begriff Matrix (pl. Matrizen) näher erläutert werden:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

Die Zahlen a_{11} bis a_{mn} werden als Elemente oder Koeffizienten bezeichnet. Der erste Index gibt die Zeilennummer, der zweite die Spaltennummer an. Greift man sich eine Spalte der Matrix heraus, repräsentiert sie einen Spaltenvektor. Analog wird eine herausgegriffene Zeile als Zeilenvektor angesehen. Die Matrix I ist als Einheitsmatrix definiert.

Matrizen lassen sich elementweise addieren, subtrahieren und mit einer Zahl multiplizieren, ähnlich den Vektoroperationen. Bei einer Matrizenmultiplikation muss die Anzahl der Spalten der ersten Matrix gleich der Anzahl der Zeilen der zweiten Matrix sein und es muss auf die Reihenfolge der Matrizen geachtet werden. Matrizenmultiplikationen können maschinell oder von Hand z.B. nach dem Schema von Falk berechnet werden. Wird eine Matrix (z.B. A) mit der Einheitsmatrix I multipliziert, so

---

[12] Artikel *Vektor- und Matrizenrechnung, räumliche Koordinatentransformation.* In: Wissenschaft-Online.
Bearbeitungsstand: 2006.
URL: http://www.wissenschaft-online.de/spektrum/projekt/quasi5.htm
(Abgerufen: 21. November 2006, 16:28 UTC)

gilt $I\ A = A\ I = A$. Bei der Multiplikation eines Vektors mit einer Matrix wird der Vektor zu einem Zeilenvektor bzw. zu einer einzeiligen Matrix umgeschrieben. Umgekehrt wird, bei der Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor, der Vektor zu einem Spaltenvektor bzw. zu einer einspaltigen Matrix umgeschrieben. Als Produkt entsteht in beiden Fällen ein Vektor mit derselben Form wie der Ausgangsvektor.

Die Matrizenmultiplikation bildet die Grundlage aller Koordinatentransformationen in Räumen beliebiger Dimensionalität. In Computeranimationen wird bevorzugt der drei, vier oder fünfdimensionale „Raum" verwendet. Dabei werden in der Regel die ersten drei Dimensionen zur Orientierung im Raum verwendet und alle weiteren für etwaige Farbzuweisungen, Helligkeitszuweisungen oder zur Speicherung beliebiger anderer Informationen. Im Folgenden werde ich mich jedoch auf den dreidimensionalen Raum beschränken. Dabei werden hauptsächlich dreizeilige Spaltenvektoren als Ortsvektorn interpretiert.

Allgemein lässt sich eine räumliche Koordinatentransformation schreiben als:

$$\overrightarrow{x_{neu}} = A \cdot \overrightarrow{x_{alt}} + \vec{v}$$

Dabei ist $\overrightarrow{x_{alt}}$ der zu transformierende Punkt im Koordinatensystem und $\overrightarrow{x_{neu}}$ der transformierte Punkt. A ist die Transformationsmatrix und $\vec{v}$ ein optionaler Verschiebungsvektor.

- Ein Punkt lässt sich auf sich selbst abbilden, wenn $A = I$ (Einheitsmatrix) ist und $\vec{v}$ der Nullvektor ist.
- Ein Punkt lässt sich verschieben, wenn $A = I$ (Einheitsmatrix) ist und $\vec{v}$ ungleich dem Nullvektor.
- Eine Streckung bzw. Stauchung und Spiegelung erfolgt mit folgender Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

Dabei erfolgt die Spiegelung an der x-Achse wenn a negativ ist, an der y-Achse wenn b negativ ist und an der z-Achse wenn c negativ ist. Wenn der Betrag eines Wertes größer als 1 ist, so erfolgt eine Streckung, wenn er kleiner als 1 ist, eine Stauchung.

Parallelprojektionen werden erzielt, in dem man für $a = 0$ einsetzt (Projektion auf y-z-Ebene) oder für $b = 0$ einsetzt (Projektion auf x-z-Ebene) oder für $c = 0$ einsetzt (Projektion auf x-y-Ebene). Sobald zwei der drei Werte gleich 0 sind, so projiziert man auf die übrige Achse. Und falls A die Nullmatrix ist, so wird jeder Punkt in den Ursprung projiziert.

$$A_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix};\ A_y = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix};\ A_z = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Mit den Matrizen A_x, A_y, A_z lässt sich eine Drehung um die jeweils im Index angegebene Achse realisieren. Dabei gibt α den Drehwinkel an.

Geschickt hintereinander durchgeführt, lassen sich somit alle Transformationen wie z.B. Gleitspiegelung erzielen. Falls die Transformationen ohne Verschiebungen sind, so kann man auch direkt die einzelnen Transformationsmatrizen miteinander multiplizieren und erhält am Ende eine einzige Transformationsmatrix, die dann in die allgemeine räumliche Koordinatentransformationsformel eingesetzt werden kann. Hierbei ist jedoch auf die richtige Reihenfolge zu achten.

Für die Anwendung im Computerbereich werden, zur graphischen Darstellung, alle dreidimensionalen Objekte mit bestimmten Algorithmen, zur Darstellung auf dem Bildschirm, in zweidimensionale Objekte transformiert.

Die von der Microsoft Corporation entwickelten DirectX APIs (Application Programming Interfaces) und die von Silicon Graphics entwickelte OpenGL API sind die zwei bekanntesten und meist verwendeten APIs, die direkt mit Matrizen- und Vektorberechnungen arbeiten.

7 Umsetzung im G8 Lehrplan bayrischer Gymnasien

In den Vorbemerkungen zum G8 Lehrplan bayrischer Gymnasien sind folgende Textpassagen zu finden, die den Einsatz des Themas Parkettierung im Unterricht interessant erscheinen lassen könnten:

Schülerpotential

Schüler des Gymnasiums […] müssen die Bereitschaft mitbringen, sich […] mit **Denk- und Gestaltungsaufgaben** [Hervorhebung von mir] auseinander zu setzen und dabei zunehmend die Fähigkeit zu **Abstraktion und flexiblem Denken** [Hervorhebung von mir], zu […] entwickeln.

Ausschneidebogen des Fulleren-C_{60}-Molekülgerüstes [►Anlage 3]; Grundgerüste geometrischer Formen (Würfel, Tetraeder, …); Tangram; Besuch des Mathematikums; Goldener Schnitt erklärt am DIN Papier-Format; Aufgabe 1 der 1. Runde 2001/2002 des Landeswettbewerbs Mathematik Bayern [►Anlage 4];

Ästhetische Bildung

Die **ästhetische Bildung** [Hervorhebung von mir] […] ermöglicht es den Heranwachsenden, durch differenziertes Wahrnehmen, Erleben und Gestalten Zugänge zu künstlerischen Leistungen zu entwickeln, die das Leben und die eigene Persönlichkeit bereichern. Sie hilft den jungen Menschen auch, sich der Bedeutung von Stil und Form für die persönliche Lebensgestaltung bewusst zu werden.

Symmetrie; Kongruenzabbildungen; Anwendung des Wissens auf Kunstwerke (Escher); Quasikristalle in der Chemie;

Fächerkanon

Im Gymnasium wird den Schülern die **Welt inhaltlich wie methodisch aus der Perspektive unterschiedlicher Fächer** [Hervorhebung von mir] erschlossen. Gleichzeitig aber verfolgen fächerübergreifende Bildungs- und Erziehungsaufgaben einen ganzheitlichen Ansatz: Im Unterricht und in außerunterrichtlichen Veranstaltungen lernen und arbeiten die Schüler immer wieder auch interdisziplinär.

Museumsbesuch; Op-Art (+Geschichte); Musterentwurf; Ausführung; Mustererstellung am Computer [►CD]; Fibonacci-Kette in der Natur;

Mitgestaltung

Schüler lernen erfolgreicher, wenn sie an der Gestaltung des Unterrichts **mitwirken** [Hervorhebung von mir] können und dabei erleben, dass sie als eigenständige Persönlichkeiten mit differenzierten und für die gemeinsame Arbeit wertvollen Leistungspotentialen ernst genommen werden.

Einbezug der Vorerfahrungen: Fußbodenmuster in den Grundschulen und im häuslichen Umfeld der Schüler (Foto-Safari); Umgang mit Kartoffel- und Moosgummistempel;

Komplexe Sachverhalte

Der Bildungs- und Erziehungsauftrag des Gymnasiums fordert, dass die jungen Menschen lernen, auch komplexere Sachverhalte zu erkennen und mit ihnen umzugehen. Dies gilt ebenso für Problemstellungen, die **nicht allein im Rahmen eines einzelnen Faches** [Hervorhebung von mir] erschlossen werden können.

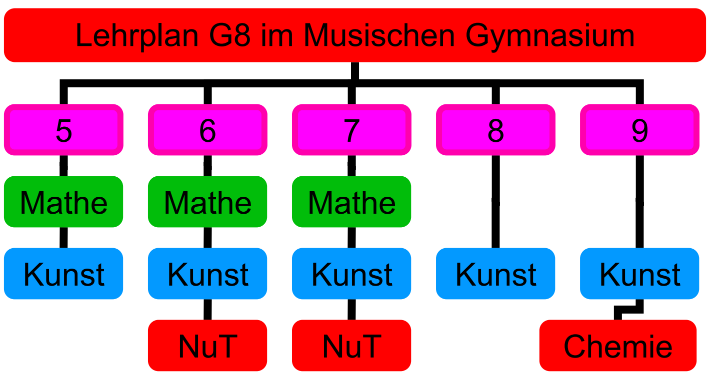
Fächerübergreifendes Arbeiten z.B.: Erstellung homogener Parkettierungen in Kunst; Berechnung in Mathematik; Erstellung einer Web-Bildergalerie in Informatik;

Fächerübergreifende Themen

Die Schüler sollen sich daher während ihrer gymnasialen Laufbahn mit fächerübergreifenden Themen auseinander setzen […]. Die Themenvorschläge in den Jahrgangsstufenlehrplänen lassen sich folgenden Bereichen zuordnen[1]: **Ästhetik** [Hervorhebung von mir] […].

Lehrkräfte

Aufgabe der Lehrkräfte ist es, […] weitgehend an der **Lebenswirklichkeit** [Hervorhebung von mir] der Schüler orientierten Unterricht zu erteilen.



Nach Jahrgangsstufen aufgelistete Fächer, in denen mir eine Einbindung des Themas Parkettierung möglich erscheint.

8 Schlussbemerkung

Bilder von Escher haben bei mir, als Schüler des musischen Bereichs, Interesse geweckt für die Entstehung solcher Grafiken.

Escher (1898 – 1972), niederländischer Künstler und Grafiker, verwendete meist transformierte homogene Körper, Streckung, Stauchung, Spiegelung und Rotation zur monohedralen Parkettierung. Heute liegt zwar die komplexeste dreidimensionale Parkettierung am Computer nur einen Klick weit entfernt, jedoch lässt sich damit nie eine solch gelungene Verbindung von Parkettierung und Kunst erzielen wie Escher es bereits in den zwanziger Jahren des vergangenen Jahrhunderts vermochte.


Abbildung 11: Eschers „Liberation"

Nach der Beschäftigung mit dem Thema Parkettierung habe ich …

- … einen Einblick in die Entstehung seiner Werke erhalten.
- … den direkten, mathematischen Praxisbezug wiederentdeckt und viel über die Funktionsweise von 3D Programmen gelernt.
- … praktische Beispiele für die Umsetzung im Unterricht gefunden.

Parkettierung ist ein komplexes Thema, das viele Teilgebiete der Mathematik vereint und weitere Fachbereiche tangiert. Daher scheint mir das Thema geeignet für eine, im G8 geforderte, fächerübergreifende Projektarbeit zu sein.

9 Literaturverzeichnis

- BAUWERK, Parkett AG (Hg.) (2007): *Oberflächen-Dessins*, St. Margrethen (CH) http://www.bauwerk-parkett.com/profi/dessin/

- BIGALKE, Hans-Günther / WIPPERMANN, Heinrich (1994): *Reguläre Parkettierungen: mit Anwendungen in Kristallographie, Industrie, Baugewerbe, Design und Kunst*, o. O.

- CASEY, Nancy (1995): *Aperiodic Tiling with Penrose Rhombs*, o. O. http://www.cs.uidaho.edu/~casey931/puzzle/penrose/penrose.html

- CASPAR, Hans-Jürgen (2003): *Über Parkettierungen*, Henstedt-Ulzburg http://matheplanet.com/default3.html?call=article.php?sid=470

- COLLINS, Stephen (2006): *Bob - Penrose Tiling Generator and Explorer*, o. O. http://www.stephencollins.net/web/penrose/

- CONRAD (Dr.), Matthias / HARBRECHT (Prof. Dr.), Bernd (2000): "Verbotene Kristalle" In: *Marburger UniJournal 6/2000*, Marburg, S. 6 http://web.uni-marburg.de/zv/news/archiv/muj-00-6/600-06.html

- FÖLL, H. (o. J.): *Quasikristalle I*, o. O. http://www.tf.uni-kiel.de/matwis/amat/mw1_ge/kap_3/advanced/t3_1_3.html

- GARDNER, Martin (1979): *Mathematisches Labyrinth*, o. O.

- GILDE, Werner (1979): *Gespiegelte Welt*, o. O.

- HAIDER, Ferdinand (2000): *Quasikristalle*, o. O. http://www.physik.uni-augsburg.de/%7Eferdi/skript/teil1/node54.html

- HARTFELDT, Christian / HENNING (Prof. Dr.), Herbert (2004): *Muster, Flächen, Parkettierungen*, Magdeburg http://www.math.uni-magdeburg.de/private/henning/praesentation_parkettierung.pdf

- KLIEM (OStR.), Albrecht / Bayerischen Staatsministerium für Unterricht und Kultus (Hg.) (2001/2002): *4. Landeswettbewerb Mathematik Bayern 1. Runde 2001/2002 - Aufgaben und Lösungen*, Würzburg http://lwmb.de/pdf/lsg041.pdf

- KLINKENBERG-HAAß, Frank / SCHÖNLEBER, Claus (o. J.): *Goldene Schnittmuster*, o. O. http://www.schoenleber.org/penrose/f-d-penrose.html

- KÖLLER, Jürgen (2004): *Homogene Parkettierungen*, o. O. http://www.mathematische-basteleien.de/parkett.htm

- KÖLLER, Jürgen (2004): *Parkettierung mit Vielecken*, o. O. http://www.mathematische-basteleien.de/parkett2.htm

- KÖLLER, Jürgen (2005): *Begegnungen mit Parkettierungen*, o. O. http://www.mathematische-basteleien.de/parkett3.htm
- PÖPPE, Christoph / ZEGER, *Gabriele (1998): Viele Dimensionen und Quasikristalle*, Annweiler http://www.wissenschaft-online.de/spektrum/projekt/quasi.htm
- RINGELING, Manuel (2004): *Parkettierungen*, Kaiserslautern http://www.uni-kl.de/AG-Leopold/ss04/wahlpflicht/parkettierung.pdf
- UNGER, Christoph (2000): *Seminar zur Medienbildung, Parkettierung*, o. O. http://www.mathekiste.de/bildertess/parkettstart.htm
- WIKIPEDIA, Die freie Enzyklopädie (Hg.) (2006): *Ebene kristallographische Gruppe*, o. O. http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Ebene_kristallographische_Gruppe&oldid=14106974
- WIKIPEDIA, Die freie Enzyklopädie (Hg.) (2006): *Kongruenzabbildung*, o. O. http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Kongruenzabbildung&oldid=17331687
- WIKIPEDIA, Die freie Enzyklopädie (Hg.) (2006): *Kristallografische Raumgruppe*, o. O. http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Kristallografische_Raumgruppe&oldid=25280844
- WIKIPEDIA, Die freie Enzyklopädie (Hg.) (2006): *Parkettierung*, o. O. http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Parkettierung&oldid=25591125
- WIKIPEDIA, Die freie Enzyklopädie (Hg.) (2007): Fibonacci-Folge, o. O. http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Fibonacci-Folge&oldid=26728349
- WIKIPEDIA, Die freie Enzyklopädie (Hg.) (2007): *Homöomorphismus*, o. O. http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Hom%C3%B6omorphismus&oldid=26756102

10 Bilderverzeichnis

Anlage 1 (Orbifold-Notation):[13]

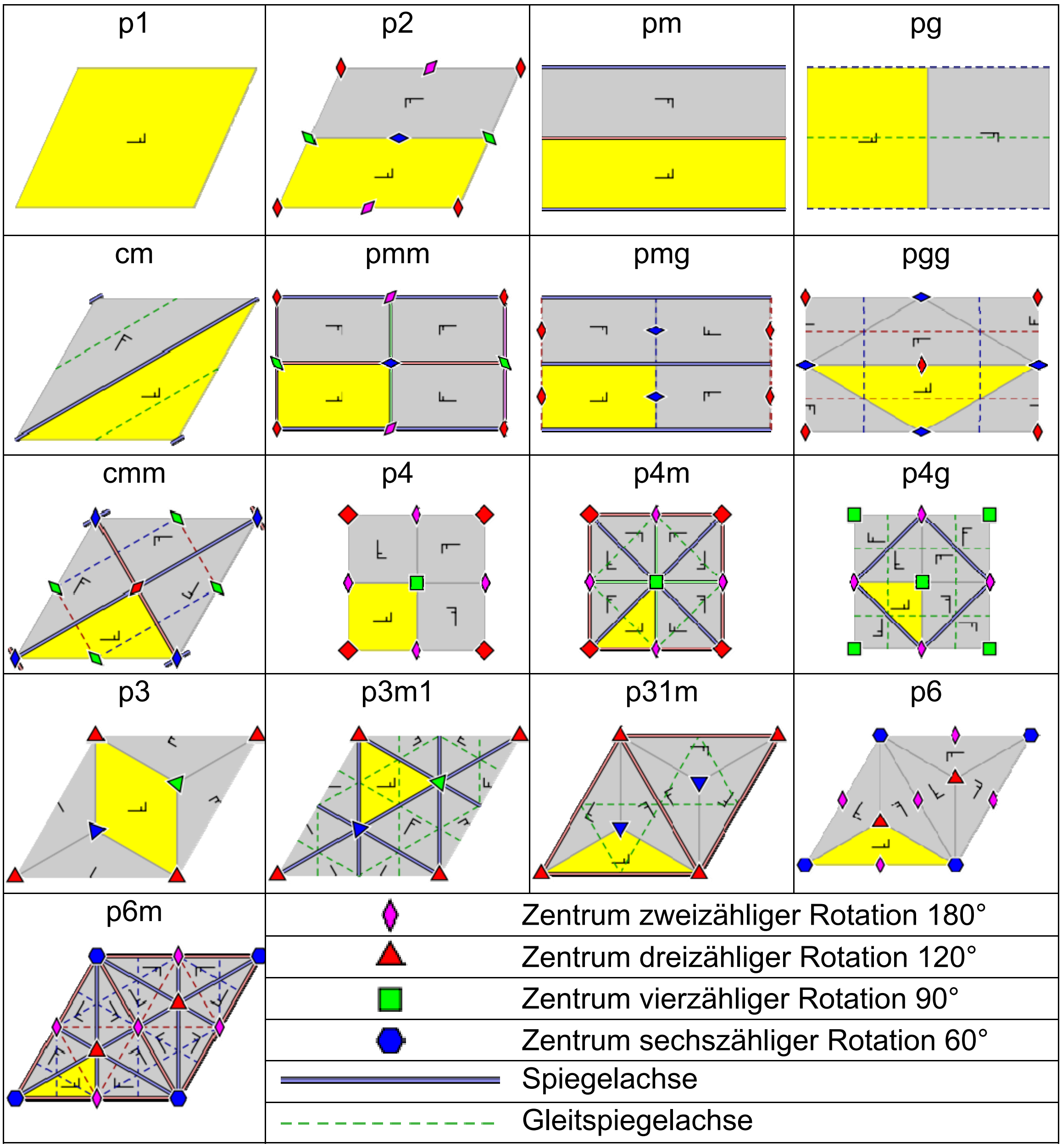
Gruppe	Orbifold-Notation	Elementarzellen in minimaler Translationszelle
p1	O1	1
p2	2222	2
pm	**	2
pg	XX	2
cm	*X	2
pmm	*2222	4 Rechtecke
pmg	22*	4
pgg	22X	4
cmm	2*22	4
p4	442	4
p4m	*442	8 rechtwinklig gleichschenklige Dreiecke
p4g	4*2	8
p3	333	3
p3m1	*333	6 gleichseitige Dreiecke
p31m	3*3	6
p6	632	6
p6m	*632	12 rechtwinklige Dreiecke mit einem Kathetenverhältnis von 2:1

Beschreibung der Spalte „Orbifold-Notation“:

- Ziffern *n* (2, 3, 4, 6) bezeichnen ein *n*-zähliges Rotationszentrum.
- Ein * steht für eine Spiegelachse.
  - Ziffern, die vor einem * stehen, liegen abseits der Spiegelachsen
  - Ziffern, die nach einem * stehen, liegen auf den Spiegelachsen
- Ein X steht für eine Gleitspiegelung.
- Ein O steht für keine Symmetrien abgesehen von den Translationen
- Die in jeder Gruppe vorkommenden Translationen werden nicht explizit notiert.

[13] Artikel *Ebene kristallographische Gruppe.* In: Wikipedia, Die freie Enzyklopädie. Bearbeitungsstand: 27. Februar 2006, 13:36 UTC. URL: http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Ebene_kristallographische_Gruppe&oldid=14106974 (Abgerufen: 25. November Januar 2007, 19:46 UTC)

Anlage 1 (Orbifold-Notation) [Teil 2]:[14]



14 Artikel *Ebene kristallographische Gruppe.* In: Wikipedia, Die freie Enzyklopädie. Bearbeitungsstand: 27. Februar 2006, 13:36 UTC. URL: http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Ebene_kristallographische_Gruppe&oldid=14106974 (Abgerufen: 25. November Januar 2007, 19:46 UTC)

Anlage 2 (Fibonacci-Kette):

Eine Fibonacci-Kette besteht aus 2 verschiedenen Elementen, in den meisten Fällen **L** und **S**. Gestartet wird zum Beispiel mit dem Element **S**. Anschließend erhält man die nächste Kette indem man **S** durch **L** und **L** durch **LS** substituiert.

S.
L.
LS.
LSL.
LSLLS.
LSLLSLSL.
LSLLSLSLLSLLS.
LSLLSLSLLSLLSLSLLSLSL.
LSLLSLSLLSLLSLSLLSLSLLSLLSLSLLSLLS.
LSLLSLSLLSLLSLSLLSLSLLSLLSLSLLSLLSLSLLSLSLLSLLSLSLLSLSL.
…

Erstellung einer Fibonacci-Kette mittels Hypertext-Preprozessor Skript:

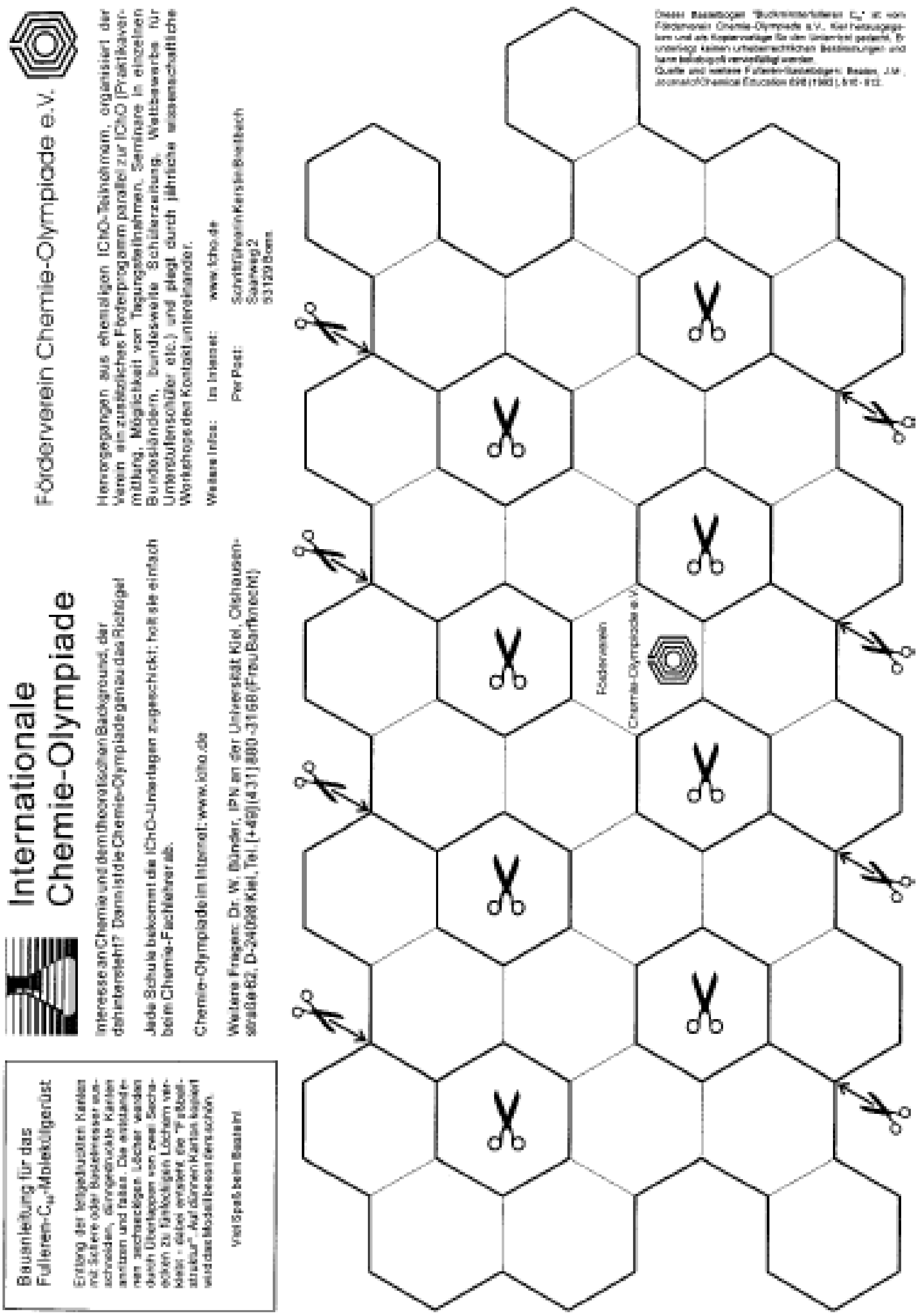
```
<?php
function fibonacci($string) {
	$str_arr = explode(" ", $string);
	for ( $i = 0; $i < count($str_arr); $i++ ) {
		if ( $str_arr[$i] == "S" ) {
			$str_arr[$i] = "L";
		} else {
			$str_arr[$i] = "L S";
		}
	}
	$string = implode(" ", $str_arr);
	return $string;
}

function output_fibonacci() {
	$string = "S";
	echo $string."<br />\r\n";
	for ( $i = 0; $i <= 24; $i++ ) {
		$string = fibonacci($string);
		echo $string."<br />\r\n";
	}
}

output_fibonacci();
?>
```

Die gelb markierte Zahl „24“ bedeutet, dass 24 Substitutionssequenzen durchlaufen werden.
WARNUNG: Hohe Werte können zu einem Buffer-Overflow führen.
Das Skript kann online gefahrlos getestet werden: http://ingo.zansinger.labenwölfe.de/fibonacci.php

Anlage 3 (Fulleren-C_{60}-Molekülgerüst):[15]



15 Hochauflösende PDF Datei auf CD: Bauanleitung.pdf

Anlage 4 (Landeswettbewerb Mathematik Bayern):[16]

4. Landeswettbewerb Mathematik Bayern
1. Runde 2001/2002 – Aufgaben und Lösungen

Aufgabe 1

Yannick besitzt gleichseitige Dreiecke, Quadrate sowie regelmäßige Sechs- und Achtecke, die alle dieselbe Seitenlänge haben. Er legt damit ohne Lücken und Überlappungen regelmäßige Muster. Dabei treffen Ecken immer auf Ecken und an jeder Ecke dürfen zwar verschiedenartige Vielecke zusammentreffen, aber sie müssen an allen Ecken in jeweils gleicher Reihenfolge angeordnet sein.

Finde alle möglichen Muster und zeige, dass es keine weiteren gibt.

Lösung

Die Innenwinkel der regelmäßigen Vielecke haben die Winkelweiten 60° (Dreieck), 90° (Quadrat), 120° (Sechseck) und 135° (Achteck). Damit an einer Ecke keine Lücken oder Überschneidungen auftreten, muss sich der Vollwinkel von 360° als Summe dieser Winkel darstellen lassen. Wir erhalten durch systematisches Probieren folgende Möglichkeiten:

Vielecke der gleichen Art:	$6 \cdot 60° = 360°$	sechs Dreiecke	(1)
	$4 \cdot 90° = 360°$	vier Quadrate	(2)
	$3 \cdot 120 = 360°$	drei Sechsecke	(3)

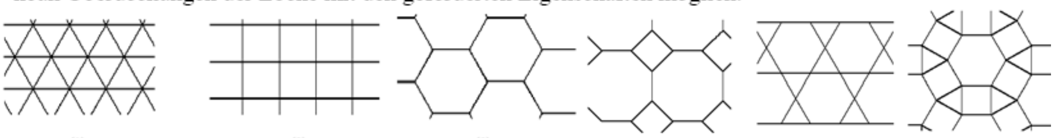
Ein Muster nur mit Achtecken ist nicht möglich, da 360 kein Vielfaches von 135 ist.

Da 135 die einzige ungerade Zahl ist, kann es nur zwei Achtecke oder kein Achteck geben, das an einem Eckpunkt des Musters vorkommt. Bei der folgenden Übersicht wurde immer versucht, möglichst große zulässige Summanden von 360° bzw. vom verbleibenden Winkelmaß zu subtrahieren.

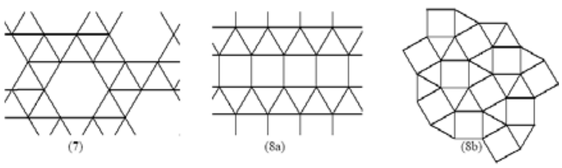
Vielecke unterschiedlicher Art:

$2 \cdot 135° + 90° = 360°$	zwei Achtecke, ein Quadrat	(4)
$2 \cdot 120° + 2 \cdot 60° = 360°$	zwei Sechsecke, zwei Dreiecke	(5)
$1 \cdot 120° + 2 \cdot 90° + 1 \cdot 60° = 360°$	ein Sechseck, zwei Quadrate, ein Dreieck	(6)
$1 \cdot 120° + 4 \cdot 60° = 360°$	ein Sechseck, vier Dreiecke	(7)
$2 \cdot 90° + 3 \cdot 60° = 360°$	zwei Quadrate, drei Dreiecke	(8)

Die folgenden Bilder zeigen, dass es für jeden dieser Fälle ein regelmäßiges Muster gibt. Da bei der Anordnung der zwei Quadrate und der drei Dreiecke sogar zwei Möglichkeiten existieren, sind insgesamt neun Überdeckungen der Ebene mit den geforderten Eigenschaften möglich.



(1) (2) (3) (4) (5) (6)



(7) (8a) (8b)

16 KLIEM (OStR.), Albrecht / Bayerischen Staatsministerium für Unterricht und Kultus (Hg.) (2001/2002): *4. Landeswettbewerb Mathematik Bayern 1. Runde 2001/2002 - Aufgaben und Lösungen*, Würzburg http://lwmb.de/pdf/lsg041.pdf

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst und keine anderen als die im Literaturverzeichnis angegebenen Hilfsmittel verwendet habe.

Nürnberg, den 26.01.2007 ____________________________

Unterschrift